

السؤال الأول : (17 علامة)

لتكن (x_k) متتالية في الفضاء \mathbb{R}^n حيث $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$ ولتكن $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ نقطة من \mathbb{R}^n ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية (x_k) من النقطة a هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), (x_{k_2}), \dots, (x_{k_n})$ من الأعداد a_1, a_2, \dots, a_n .

السؤال الثاني : (25 علامة)

(أ) عرّف تكافؤ نظيمين N_1 و N_2 على الفضاء المتجهي V .
(ب) لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من \mathbb{R}^n ولتكن a نقطة من $A \cap B$ ، فإذا فرضنا وجود النهايتين $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ فاثبت

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(ج) * ادرس وجود نهاية للدالة $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2} ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ في النقطة $(0, 0)$

ثم بين فيما إذا كانت مستمرة في تلك النقطة .

السؤال الثالث : (23 علامة)

عرّف التطبيق المستمر بانتظام بين فضاءين مترين، ثم أثبت أنه إذا كان $(V, \|\cdot\|)$ فضاء منظماً فإن التطبيق

$$V \times V \rightarrow V ; (x, y) \rightarrow x + y$$

السؤال الرابع : (23 علامة)

* أثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل $f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0, 0)$.

السؤال الخامس : (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $I = \iint_S (x^2 y + x y^2) dx dy$ حيث S السطح المحصور بالمستقيمات $y = x$ و $x = 0$ و $y = 2$.

س

سليم تصحيح مقدر تحليل (ع)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ١٤١٧-١٤١٨

السؤال الأول: [17]

نختار في \mathbb{R} المسافة المألوفة $d(x, y) = |y - x|$ وفي \mathbb{R}^n المسافة

$$d_0((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i|$$

لنضع الشرط: لنفرض ان المتتالية (x_k) تتقارب من النقطة a ، عندئذ

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N_\epsilon \Rightarrow d_0(x_k, a) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_{k,i} - a_i| < \epsilon$$

وبالتالي فإن

$$d(x_k, a_i) = |x_{k,i} - a_i| < \epsilon \text{ وذلك أيًا كان } i$$

المجموعة $\{n, n+1, \dots\}$ وهذا يعني ان المتتالية الحقيقية $(x_{k,i})$ تتقارب من العدد a_i . (10)

كفاية الشرط: لنفرض ان الشرط محقق عندئذ

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists N'_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N'_\epsilon \Rightarrow d(x_k, a) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_{k,i} - a_i| < \epsilon$$

ذلك أيًا كان i من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ وبالتالي فإن: (7)

$$d_0(x_k, a) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_{k,i} - a_i| < \epsilon \text{ وهذا يعني ان المتتالية } (x_k) \text{ تتقارب من النقطة } a.$$

السؤال الثاني: [25]

(P) اذا كان N_2, N_1 تطبيقين على الفضاءات المتجهية V ذاتهما نواتجنا نقول انهما متكافئان

اذا وجد عددان حقيقيان $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ بحيث يكون $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ (5)

(C) لنفرض ان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = P$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$ عندئذ فإن

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in A; d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - P| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^{*+}, \forall x \in B; d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}$$

والتالي:

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^{+*}; \forall x \in A \cap B, d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (p+q)| \leq |f(x) - p| + |g(x) - q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(10)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = p + q$$

أي أن

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$$

(ع) إذا أخذنا التساليين

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

بعد حفظ أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ لا توجد نتيجة واحدة } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n)$$

(10)

غير موجودة

وبما أنه ليس للدالة نهاية في النقطة $(0,0)$ نتج أن الدالة غير مستمرة في تلك النقطة.

السؤال الثالث: 23

- ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضاءين مترين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من E و يأخذ قيمه في F ، نقول عن f أنه مستمر بالنظام على D إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ϵ ، عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d_E(x, y) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$

(7)

إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d_E(x, y) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$

- يتبادل كل عدد حقيقي موجب ϵ ، عدد حقيقي موجب $\delta = \epsilon$ بحيث إذا كان (x, y) و (x', y') أي عنصرين من $V \times V$ يحققان:

$$d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y') = \|x - x'\| + \|y - y'\| < \epsilon \quad (8)$$

$$d(x+y, x'+y') = \|(x+y) - (x'+y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| < \epsilon = \epsilon \quad (8)$$

طأن:

الاربع: 23

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \quad (6)$$

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \quad (6)$$

$$h \frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 = h + 0 + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

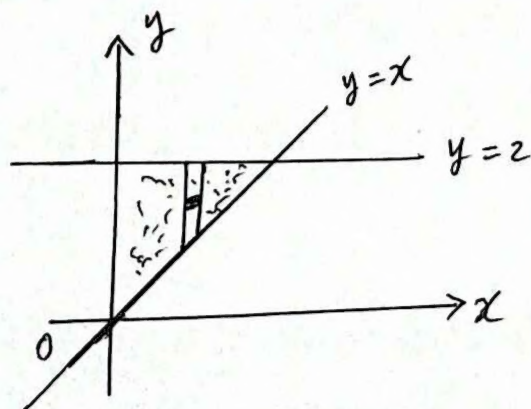
$$h(h^2-k^2) = h(h^2+k^2) + \eta(h,k)(h^2+k^2)^{3/2}$$

$$\eta(h,k) = \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h,h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad (5)$$

وبالتالي لا يمكن للدالة η أن تتقارب من الصفر عندما $(h,k) \rightarrow (0,0)$ ومنه نستنتج ان الدالة f غير قابلة للحفظ في النقطة $(0,0)$.

السؤال الخامس: 15



$$I = \int_0^2 dx \int_x^2 (x^2y + xy^2) dy$$

$$I = \int_0^2 dx \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_x^2 \quad (8)$$

$$I = \int_0^2 dx \left[\left(2x^2 + \frac{8x}{3} \right) - \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} \right) \right] = \int_0^2 \left(-\frac{5x^4}{6} + 2x^2 + \frac{8x}{3} \right) dx \quad (7)$$

$$= \left[-\frac{x^5}{6} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} \right]_0^2 = -\frac{32}{6} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{16}{3}$$

السؤال السادس: 16